Meccanica Quantistica
22 Febbraio 2013

Esercizio 1

Un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e frequenza ω sia perturbato dal termine

$$V = V_0\epsilon(\hat{x}\hat{p} + \hat{p}\hat{x})\,, \quad \epsilon \ll 1\,.$$

Si scrivano le correzioni ai livelli energetici imperturbati al primo e al secondo ordine in ϵ.

[10 punti]

Esercizio 2

Si considerino due particelle distinguibili di spin 1/2 interagenti con l'hamiltoniana

$$H = -A\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + B(S_1^x + S_2^x)^2\,.$$

Trovare autovalori e autovettori dell'hamiltoniana. Se la tempo $t = 0$ il sistema si trova nello stato $|+\rangle|-\rangle$ ($S^z|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle$) trovare lo stato al tempo t.

[10 punti]

Esercizio 3

Sia data un'Hamiltoniana in tre dimensioni

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V(|\vec{x}|)\,.$$

1) Si calcoli il commutatore $[\vec{x}\cdot\vec{p},\, H]$.
2) Si usi il risultato di cui al punto 1) per dimostrare che

$$\langle\psi_E|\frac{\vec{p}^{\,2}}{m}|\psi_E\rangle = \langle\psi_E|\vec{x}\cdot\vec{\nabla}V|\psi_E\rangle \tag{0.1}$$

essendo $|\psi_E\rangle$ autoket dell'Hamiltoniana H.
3) Si verifichi la giustezza della relazione (0.1) per lo stato fondamentale dell'atomo di idrogeno. Formula utile:

$$\psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-\frac{r}{a}}\,, \quad r = |\vec{x}|\,, \quad a = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$$

[10 punti]

Formule utili:

$$\hat{a} = \sqrt{m\omega/(2\hbar)}(\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega))\,, \quad \hat{J}_\pm|\,j,m> = \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}|\,j,m\pm 1>$$